Лекция 3

Напряженно – деформированное состояние твердого тела
Теории прочности

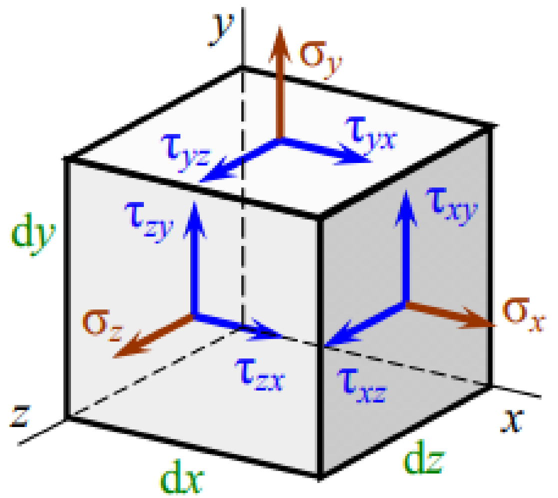
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИЕ

Если твердое тело нагружено системой сил, то через любую его точку можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, вызывающие линейные и угловые деформации.

Напряженное состояние – совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

Напряжение – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий, то есть внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в окрестности рассматриваемой точки.

Напряжение полное *p* – уравновешивающее внешнюю нагрузку. Напряжение p – величина векторная, раскладывается на составляющие: по нормали к сечению σ и в плоскости сечения τ, причем $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$

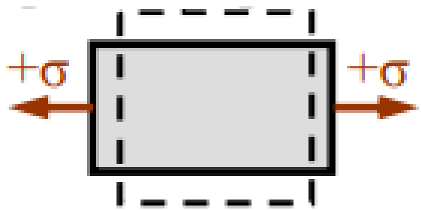


Нормальные и касательные напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда

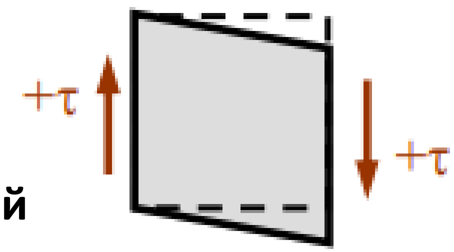
Обозначение индексов при напряжениях:
первый соответствует площадке, нормаль к которой совпадает с направлением оси (адрес площадки);
второй указывает направление напряжений.
Нормальные напряжения имеют только первый индекс.

Правило знаков

Нормальные напряжения σ -
вызывают удлинение или укорочение граней параллелепипеда.
Растягивающие* *напряжения считают* *положительными



Касательные напряжения τ -
вызывают смещение граней, их сдвиг, изменение углов прямых на тупые и острые.
Касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремится вращать грань по ходу часовой стрелки.



Напряженное состояние характеризуют тензором напряжений.

Тензор **(от лат. *tensus* напряженный, натянутый) – величина особого рода, задаваемая числами и законами их преобразования; является развитием и обобщением векторного исчисления и теории матриц.**

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

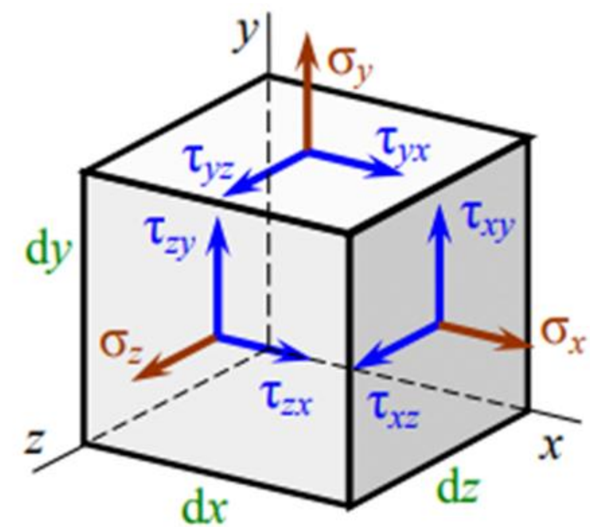
- в первой строке тензора ставят напряжения на первой площадке (*x*);

- во второй – наплощадке *y*;

- в последней строке – на площадке *z*.

Тензор содержит девять компонентов.

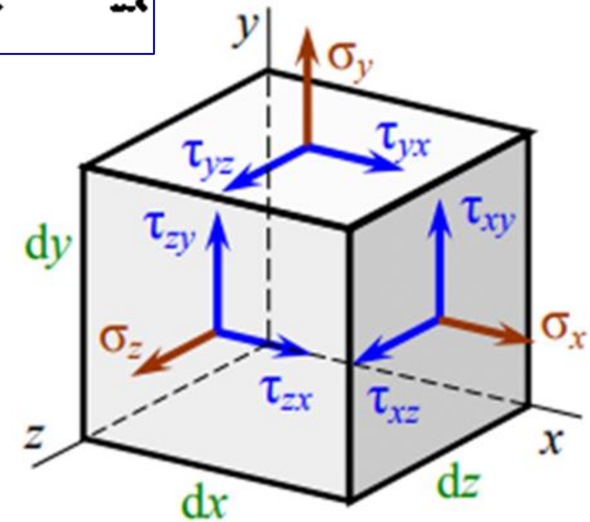
Параллелепипед, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, должен находиться в равновесии при действии сил, приложенных к его граням. Нормальные силы, приложенные к граням параллелепипеда, взаимно уравновешены и, следовательно, три уравнения равновесия тождественно удовлетворяются.



Составив уравнения суммы моментов всех сил относительно координатных осей x, y, z, можно получить следующие три равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$



Эти равенства называют
закономностью парности касательных напряжений:
если по какой-либо площадке действует некоторое касательное напряжение,
то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку.

Вследствие закона парности касательных напряжений тензор становится симметричным относительно главной диагонали.

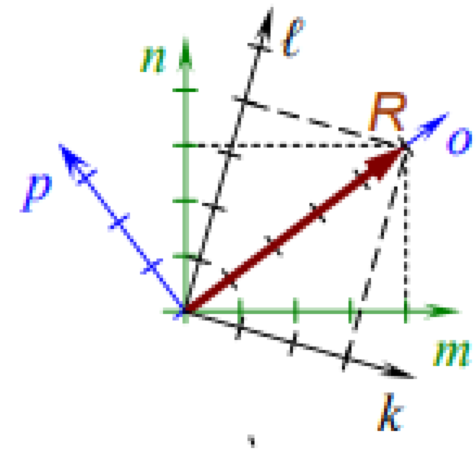
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Вместо девяти компонентов независимыми оказываются только шесть.

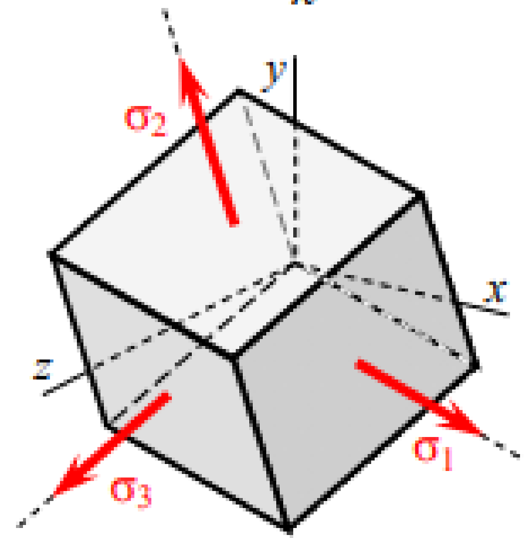
$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

С изменением ориентации параллелепипеда в пространстве выделенного объема напряженного тела соотношение между нормальными и касательными напряжениями будет изменяться. Следовательно, и запись тензора для одного и того же напряженного состояния будет различной.

Пример - разные варианты описания одного и того же вектора *R* на плоскости в зависимости от выбранной системы координат.
В системе *k, ℓ: R(3, 4);*
в системе *m, n: R(4, 3);*
в системе *o, p: R(5, 0).*
Очевидно, последний вариант описания более удобен, поскольку одна из проекций вектора равна его длине, а другая – равна нулю.



Поэтому необходимо найти такое положение элементарного объема, чтобы количество действующих по его граням напряжений было минимальным.
Можно найти такую ориентацию параллелепипеда, при которой по его граням действуют только нормальные напряжения.



Ориентация элементарного параллелепипеда, при которой по граням действуют только нормальные напряжения

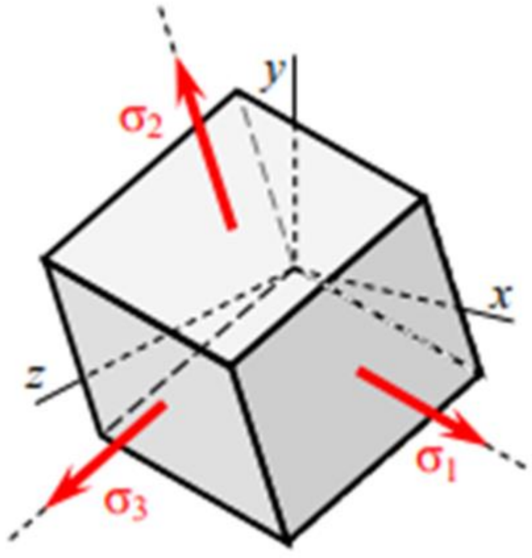
Количество независимых компонент тензора в этом случае уменьшается до трех.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

При расчете инженерных конструкций нет необходимости определять напряжения по всем площадкам, проходящим через данную точку. Достаточно знать экстремальные (максимальное и минимальное) их значения.

Максимальное и минимальное напряжения называются **главными напряжениями,** а площадки, на которых они действуют – **главными площадками**

Главные площадки – площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют.
Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам.
Главные напряжения – нормальные напряжения, принимающие экстремальные значения.

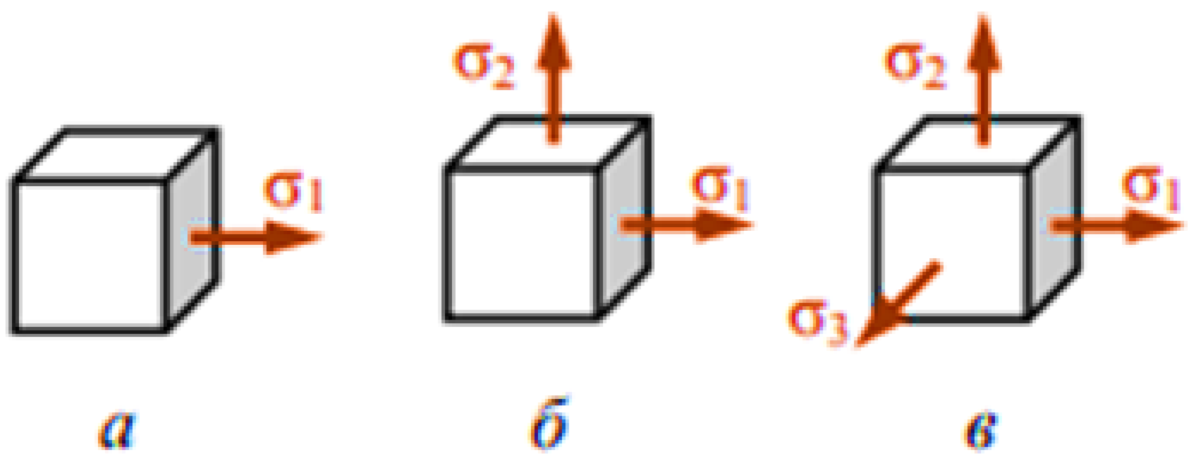


Главные напряжения нумеруют в порядке убывания

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

ВИДЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ:

– **линейное (одноосное) - а**
– **плоское (двухосное) - б;**
– **объемное (трехосное) - в**

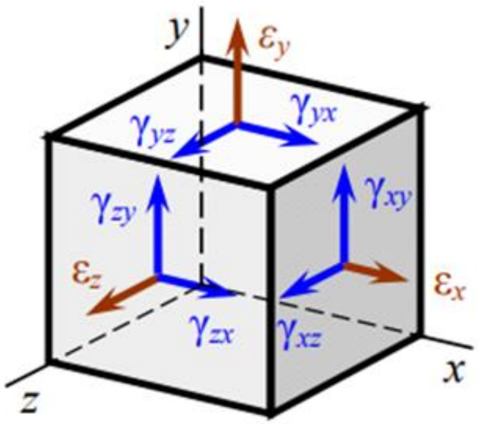


ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Деформированное состояние – совокупность относительных удлинений и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через рассматриваемую точку.

Нормальные напряжения σ вызывают удлинение граней, оцениваемое относительной линейной деформацией ε.

Касательные напряжения вызывают сдвиг граней, оцениваемый относительным углом сдвига γ.



Тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Главные деформации – относительные удлинения рёбер параллелепипеда, параллельные главным напряжениям; в направлении главных деформаций углы сдвига отсутствуют;

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3.$$

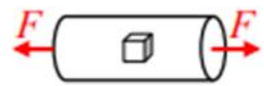
Тензор деформаций для главных направлений

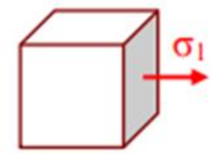
$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ (НС)

Один и тот же материал может проявлять резко различные характеристики прочности и пластичности в зависимости от схемы напряженного состояния

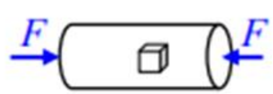
1. Растяжение гладких образцов ДО образования шейки. Линейное НС

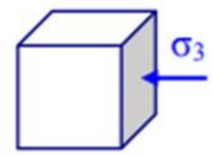




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

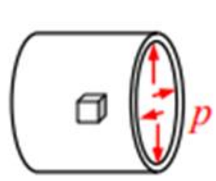
2. Сжатие образцов при смазке торцевых поверхностей. Линейное НС

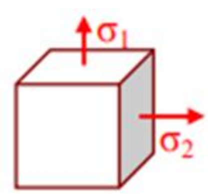




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

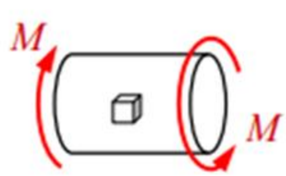
3. Цистерна, сферическая оболочка под давлением. Плоское НС

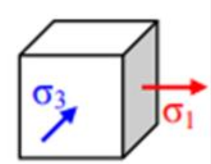




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

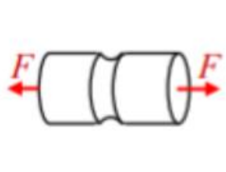
4. Вал под действием скручивающих моментов. Плоское НС

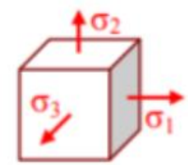




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

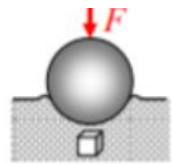
5. Растяжение образца с концентратором напряжений (надрезом)
Объемное одноименное НС

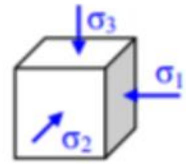




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

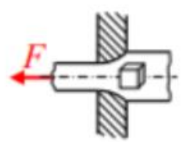
6. Измерение твердости НВ, закрытая ковка в штампах, прессование
Объемное одноименное НС, трехосное сжатие

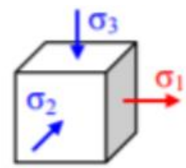




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

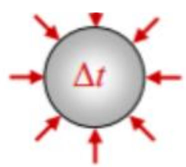
7. Волочение проволоки, труб. Объемное разноименное НС

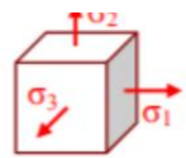




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

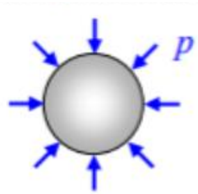
8. Быстрый нагрев шара. Трехосное растяжение

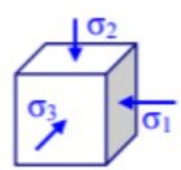




$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

9. Гидростатическое сжатие. Трехосное сжатие





$$T_\sigma = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

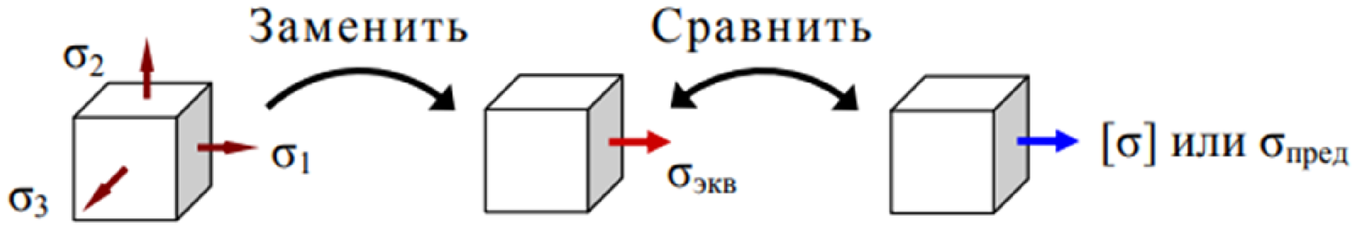
ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состояниях соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны (тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы), что экспериментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, то есть простому растяжению или сжатию.

Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, достаточно полно приведены в справочной литературе.

Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением, как показано на схеме.



Эквивалентное напряжение $\sigma_{экв}$ **- напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.**

ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ:

1. **Гипотеза наибольших нормальных напряжений (первая теория прочности)**

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное нормальное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении:

$$\boxed{\sigma_{экв(I)} = \sigma_1 \leq [\sigma]}$$

[σ] – допускаемое напряжение при растяжении. Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея (XVII).

Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений и не учитывает появления пластических деформаций; дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекло, керамика, камень, кирпич, бетон, гипс.

2. **Гипотеза наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности)**

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении:

$$\varepsilon_{max} \le [\varepsilon].$$

Экспериментально гипотеза подтверждается слабо, в расчетной практике применялась в начале прошлого века.

Гипотеза предложена Э. Мариоттом (1682), развита Б. Сен-Венаном (XIX).

$$\boxed{\sigma_{экв(II)} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma].}$$

3. **Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья теория прочности)**

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\tau_{max} \le [\tau]$$

Гипотеза предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871).

Гипотеза не учитывает действие второго главного напряжения σ_2.
Хорошо согласуется с опытом для пластичных материалов.

$$\boxed{\sigma_{экв(III)} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma].}$$